

Тема лекции и практики:

**«ПОСТРОЕНИЕ ПАРНЫХ
НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ
(парных линейных уравнений
регрессии)»**

ВОПРОСЫ ТЕМЫ:

- 1. Построение стандартной парной гиперболической модели (уравнения регрессии) МНК**
- 2. Построение стандартной степенной парной модели (уравнения регрессии) МНК**

Виды математических моделей (стандартных функций)

Математическая модель (стандартная функция)

ПАРНАЯ (один фактор)
 $Y = f(X)$

МНОЖЕСТВЕННАЯ (много факторов)
 $Y=f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$

Функция одной переменной

Функция нескольких переменных

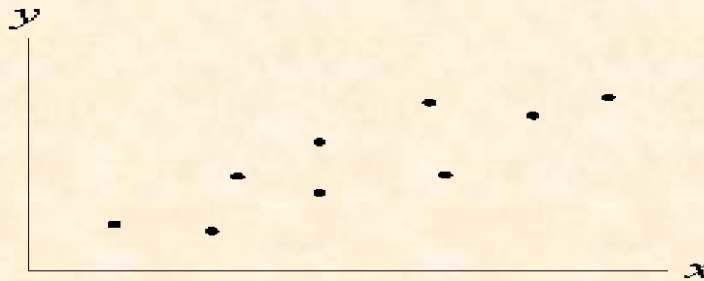
Вид модели	Парная модель	Множественная модель
линейная	$y = ax + b$	$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b$
гиперболическая	$y = a/x + b$	$y = a_1/x_1 + a_2/x_2 + \dots + a_n/x_n + b$
полином 2 степени	$y = ax^2 + bx + c$	$y = a_1x_1^2 + b_1x_1 + a_2x_2^2 + b_2x_2 + c$
полином 3 степени	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$y = a_1x_1^3 + b_1x_1^2 + c_1x_1 + a_2x_2^3 + b_2x_2^2 + c_2x_2 + d$
степенная	$y = ax^b$	$y = ax_1^{b_1}x_2^{b_2}\dots x_n^{b_n}$
показательная	$y = ab^x$	$y = ab_1^{x_1}b_2^{x_2}\dots b_n^{x_n}$
обратная	$y = 1/(ax + b)$	$y = 1/(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b)$
экспоненциальная 1	$y = ae^{bx}$	$y = ae^{b_1x_1}e^{b_2x_2}\dots$
экспоненциальная 2	$y = e^{ax+b}$	$E^{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b}$
логарифмическая	$y = a \ln(x) + b$	$y = a_1 \ln(x_1) + a_2 \ln(x_2) + \dots + b$

Этапы построения (поиска) стандартных парных функций

1 Этап: Определяются переменные величины Y и X

2 Этап: Формируется статистическая выборка для переменных X и Y .

3 Этап: Строится поле корреляции (зависимости).



4 Этап: Визуально по характеру распределения точек данных выдвигается гипотеза с помощью какой стандартной парной функции целесообразно аппроксимировать не строгую зависимость (гипотез может быть несколько)!!!!!!!!!!

5 Этап: Записывается выбранная функция в общем виде и определяются ее параметры методом наименьших квадратов или методом центральных точек. Если выбранная функция – не стандартная, то метод нахождения ее параметров – это метод итераций.

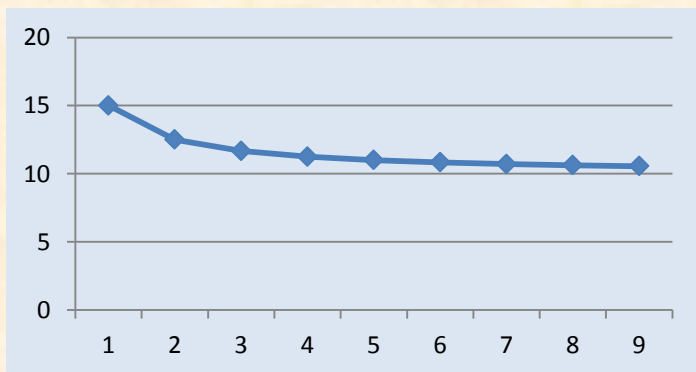
6 Этап: Рассчитанные параметры записываются в общий вид модели.

7 Этап: Рассчитываются показатели качества модели и делается вывод о возможности ее применения для прогноза Y .

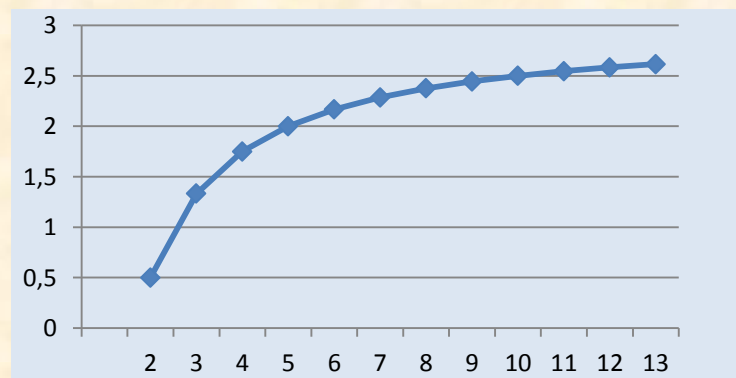
Графическая интерпретация и свойства стандартной гиперболической модели

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ: $y = a/x + b$

Знак a	Производная	Знак производной в точке	Изменение производной в точке	График модели	Направление зависимости	Степень зависимости Y от X
$a > 0$	$y' = -ax^{-2}$	-	снижается при возрастании X	отрицательный наклон с убывающим углом наклона	обратная	при возрастании X его влияние на Y снижается
$a < 0$	$y' = ax^{-2}$	+	снижается при возрастании X	положительный наклон с убывающим углом наклона	прямая	при возрастании X его влияние на Y снижается



Схематично график модели: $y = a/x + b$



Схематично график модели: $y = -a/x + b$

Графическая интерпретация и свойства стандартной степенной модели

СТЕПЕННАЯ МОДЕЛЬ: $y = ax^b$

Знак a	Знак b	Производная	Знак производной в точке	Изменение производной в точке	График модели	Направление зависимости	Степень зависимости Y от X
$a > 0$	$b > 1$	$y' = abx^{b-1}$	+	увеличивается при росте X	положительный наклон с ростом угла наклона	прямая	при росте X снижается
$a > 0$	$b > 0$	$y' = abx^{b-1}$	+	снижается при росте X	положительный с убыванием угла наклона	прямая	при росте X снижается
$a > 0$	$b < 0$	$y' = -bax^{-b-1}$	-	снижается при росте X	отрицательный с убыванием угла наклона	обратная	при росте X снижается

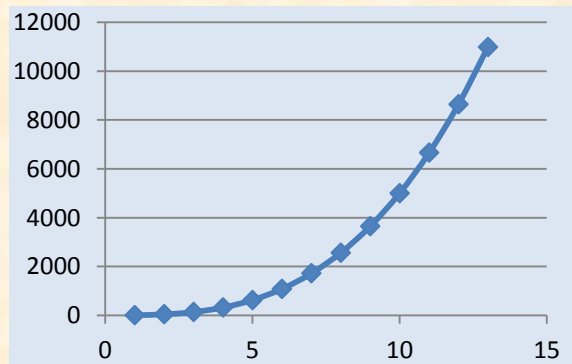


график модели: $y = ax^b$ ($b > 1$)

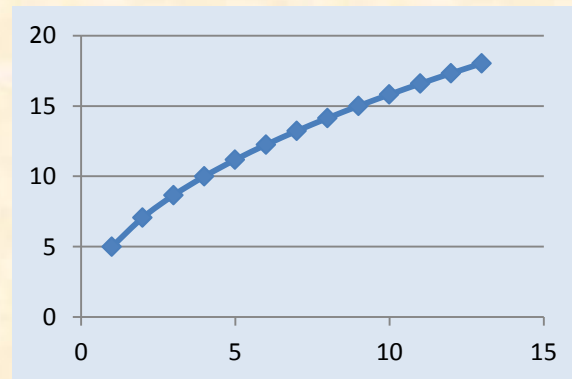


график модели: $y = ax^b$ ($b > 0$)

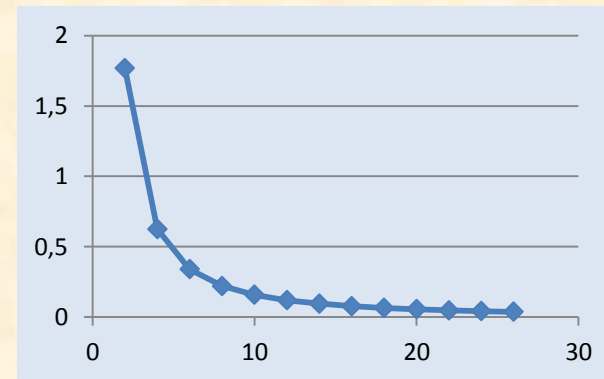


график модели: $y = ax^{-b}$ ($b < 0$)

Графическая интерпретация и свойства стандартной показательной модели

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ: $y = ab^x$

Знак a	Знак b	Производная	Знак производной в точке	Изменение производной в точке	График модели	Направление зависимости	Степень зависимости Y от X
$a > 0$	$b > 1$	$y' = ab^x \ln(b)$	+	увеличивается при росте X в равное количество раз. Коэффициент роста = b	положительный наклон с ростом угла наклона в b раз	прямая	при росте X увеличивается
$a > 0$	$b > 0$	$y' = ab^x \ln(b)$	-	снижается при росте X в равное количество раз. Коэффициент снижения = b	отрицательный наклон с убыванием угла наклона в b раз	обратная	при росте X снижается

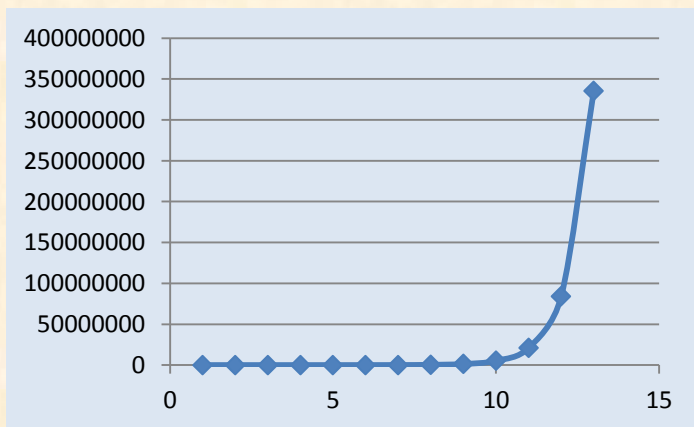


график модели: $y = ab^x$ ($b > 1$)

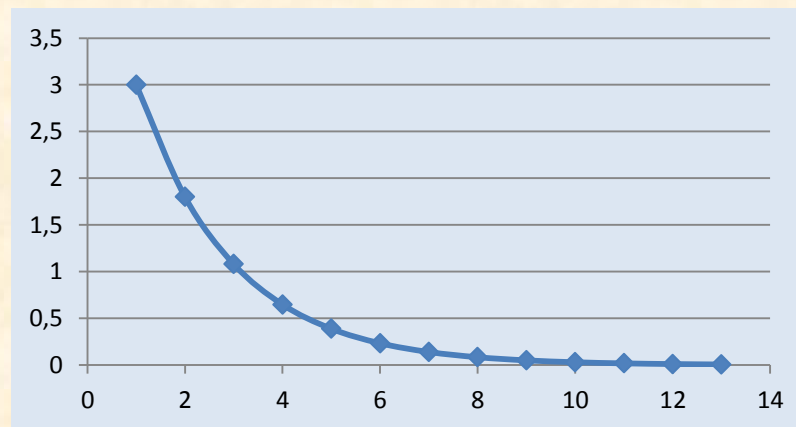


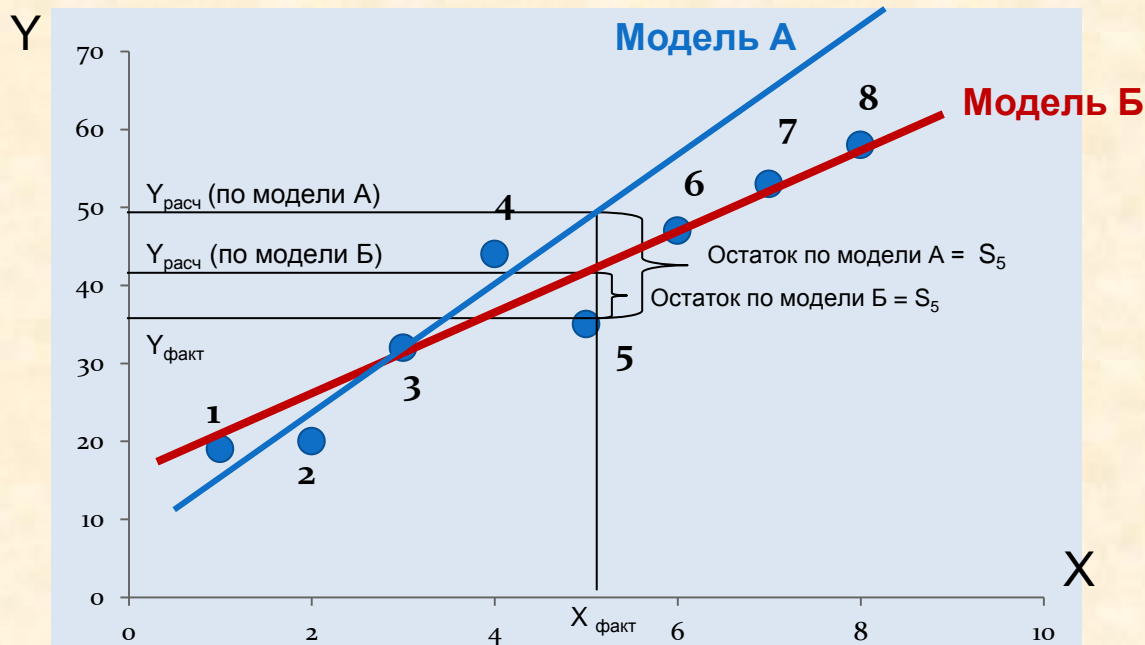
график модели: $y = ab^x$ ($b > 0$)

Построение стандартной парной линейной модели. Метод наименьших квадратов

1 Этап: Определяются переменные величины Y и X .


2 Этап: Формируется статистическая выборка для переменных X и Y (точки данных).

3 Этап: Строится **поле корреляции** (зависимости)



4 Этап: Визуально определяется характер распределения точек. Если точки стремятся к графику линейной модели, то зависимость может быть аппроксимирована парной линейной моделью.

5 Этап: Записывается линейная модель в общем виде: $y = ax + b$. Далее необходимо определить параметры a и b . Сочетаний параметров – бесконечно. **Необходимо определить сочетание, при котором линейная модель была бы максимально приближена к точкам данных, т.е. необходимо найти модель с минимально возможными остатками.**

Условие максимальной близости модели: $S = \sum S_i^2$ - минимальна !!!!!!! 

Метод наименьших квадратов (базируется на мат. анализе)

Возможности метода наименьших квадратов

Линейная модель



МНК,
МЦТ

Стандартные не линейные
модели

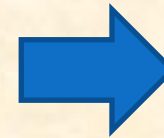


МНК,
МЦТ

Модель
приводится к
линейной



Не стандартные
модели



Модель не
приводится к
линейной



МНК



Метод итераций

Последовательность действий в МНК (если система уравнений не известна)

- 1) выбор функции для аппроксимации
- 2) Математическая запись выражения для суммы квадратов остатков как функции от параметров модели
- 3) Нахождение с помощью мат. анализа критической точки данной функции:
 - нахождение частных производных;
 - приравнивание их к нулю;
 - запись полученных уравнений в систему;
 - решение системы относительно неизвестных параметров (найдена критическая точка для функции суммы квадратов остатков)
- 4) проверка критической точки на минимум
- 5) если критическая точка – точка минимум, то параметры выбранной модели найдены


Построение стандартной гиперболической модели. Метод наименьших квадратов

1 Этап: Определяются переменные величины Y и X .

2 Этап: Формируется статистическая выборка для переменных X и Y (точки данных).

3 Этап: Строится **поле корреляции** (зависимости)

4 Этап: Визуально определяется характер распределения точек. Если точки стремятся к графику гиперболической модели, то зависимость может быть аппроксимирована парной гиперболической моделью.

5 Этап: Записывается гиперболическая модель в общем виде: **$y = a/x + b$** . Далее необходимо определить параметры a и b . Сочетаний параметров – бесконечно. **Необходимо определить сочетание, при котором гиперболическая модель была бы максимально приближена к точкам данных, т.е. необходимо найти модель с минимально возможными остатками.** 

Условие максимальной близости модели: **$S = \sum S_i^2$ - минимальна !!!!!!!**

Метод наименьших квадратов (базируется на мат. анализе)

Построение стандартной парной гиперболической модели. Метод наименьших квадратов

$$S = \sum S_i^2 = \sum (y_{\text{расчт } i} - y_{\text{фактич } i})^2 = \sum (a/x_i + b - y_{\text{фактич } i})^2$$

$S = f(a, b)$ – сумма квадратов остатков есть функция от параметров модели

Цель: Определить параметры **A** и **B** при которых **S минимальна** (задача из мат. анализа на определение минимума функции)

Свойство критической точки:

«Производная в критической точке равна нулю» !!!!!



Последовательность нахождения параметров **A** и **B** (координаты критической точки):

- 1) определяется S' : S'_a ; S'_b
- 2) $S' = 0$ (свойство критической точки): $S'_a (b = \text{const}) = 0$; $S'_b (a = \text{const}) = 0$
- 3) Из полученных уравнений формируется система уравнений с двумя неизвестными параметрами **A** и **B** (координатами критической точки)
- 4) Определяется: **является ли критическая точка минимумом или максимумом!!!!**
- 5) Если критическая точка – **минимум**, то полученные значения и есть параметры гиперболической модели, которая ближе остальных расположена к точкам данных.

Упростим условие: «Предположим, что у нас всего две точки данных»



$$s = \sum S_i^2 = \sum (y_{\text{расчт } i} - y_{\text{фактич } i})^2 = \sum (a/x_i + b - y_{\text{фактич } i})^2 = (a/x_1 + b - y_1)^2 + (a/x_2 + b - y_2)^2$$

$$S'_a(b = \text{const}) = ((a/x_1 + b - y_1)^2)' + ((a/x_2 + b - y_2)^2)' = 2(a/x_1 + b - y_1)(a/x_1 + b - y_1)' + 2(a/x_2 + b - y_2)(a/x_2 + b - y_2)' = 2(a/x_1 + b - y_1)/x_1 + 2(a/x_2 + b - y_2)/x_2$$

$$S'_a(b = \text{const}) = 0$$

$$2(a/x_1 + b - y_1)/x_1 + 2(a/x_2 + b - y_2)/x_2 = 0$$

$$(a/x_1 + b - y_1)/x_1 + (a/x_2 + b - y_2)/x_2 = 0$$

$$a/x_1^2 + b/x_1 - y_1/x_1 + a/x_2^2 + b/x_2 - y_2/x_2 = 0$$

$$a(1/x_1^2 + 1/x_2^2) + b(1/x_1 + 1/x_2) = y_1/x_1 + y_2/x_2$$

$$a \sum \left(\frac{1}{x_i}\right)^2 + b \sum 1/x_i = \sum (y_i/x_i) \text{ (условие, при котором } S'_a(b = \text{const}) = 0)$$

$$S'_b(a = \text{const}) = ((a/x_1 + b - y_1)^2)' + ((a/x_2 + b - y_2)^2)' = 2(a/x_1 + b - y_1)(a/x_1 + b - y_1)' + 2(a/x_2 + b - y_2)(a/x_2 + b - y_2)' = 2(a/x_1 + b - y_1) + 2(a/x_2 + b - y_2)$$

$$S'_b(a = \text{const}) = 0$$

$$2(a/x_1 + b - y_1) + 2(a/x_2 + b - y_2) = 0$$

$$(a/x_1 + b - y_1) + (a/x_2 + b - y_2) = 0$$

$$a/x_1 + b - y_1 + a/x_2 + b - y_2 = 0$$

$$a(1/x_1 + 1/x_2) + 2b = y_1 + y_2$$

$$a \sum \left(\frac{1}{x_i}\right) + nb = \sum y_i \text{ (условие, при котором } S'_b(a = \text{const}) = 0)$$

Построение стандартной парной гиперболической модели. Метод наименьших квадратов

$$\begin{cases} \sum y_i = a \sum \left(\frac{1}{x_i}\right) + nb \\ \sum \left(\frac{y_i}{x_i}\right) = a \sum \left(\frac{1}{x_i^2}\right) + b \sum \left(\frac{1}{x_i}\right) \end{cases}$$

Объединение двух условий в систему.
Решение системы относительно параметров **a**, **b** позволяет определить **критическую точку** для функции **S**

Способы решения системы

в ручную

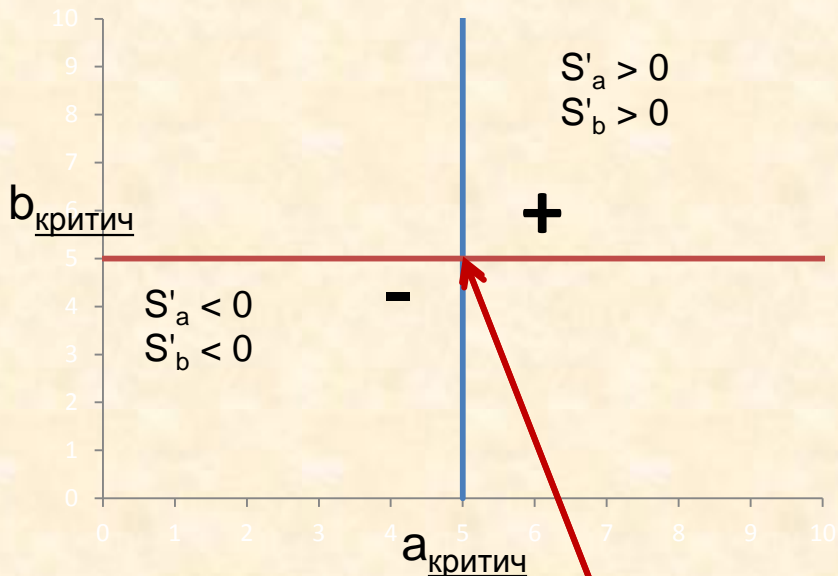
SPSS

Пакет Анализа
(MExcel)

? Критическая точка – это минимум или максимум функции

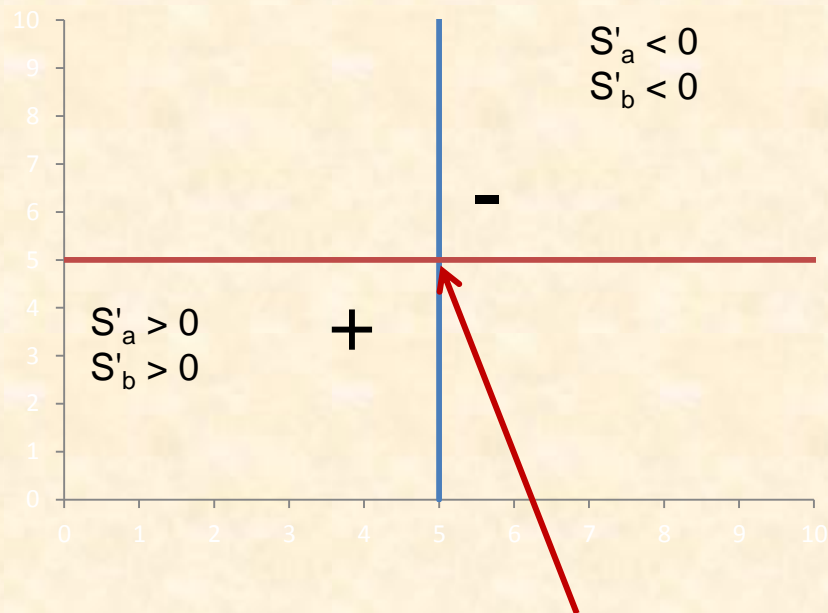
Проверка критической точки на минимум

Критическая точка - минимум



Критическая точка (a, b) - МИНИМУМ

Критическая точка - максимум



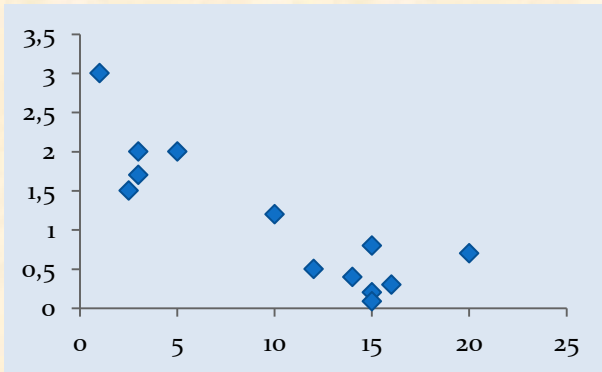
Критическая точка (a, b) - МАКСИМУМ

Построение парной степенной модели

1 Этап: Определяются переменные величины Y и X .

2 Этап: Формируется статистическая выборка для переменных X и Y (точки данных).

3 Этап: Строится **поле корреляции** (зависимости)



4 Этап: Визуально определяется характер распределения точек. Если точки стремятся к графику степенной модели, то зависимость может быть аппроксимирована парной степенной моделью.

5 Этап: Записывается степенная модель в общем виде: $y = ax^b$. Далее необходимо определить параметры a и b . Сочетаний параметров – бесконечно. **Необходимо определить сочетание, при котором степенная модель была бы максимально приближена к точкам данных, т.е. необходимо найти модель с минимально возможными остатками.**

Условие максимальной близости модели: $S = \sum S_i^2$ - минимальна !!!!!!!

Метод наименьших квадратов (базируется на мат. анализе)

$$S = \sum S_i^2 = \sum (y_{\text{расчт } i} - y_{\text{фактич } i})^2 = \sum (ax_i^b - y_{\text{фактич } i})^2$$

Построение парной степенной модели (продолжение)

$S = f(a, b)$ – сумма квадратов остатков есть функция от параметров модели

Цель: Определить параметры **A** и **B** при которых **S** **минимальна** (задача из мат. анализа на определение минимума функции)

Свойство критической точки:

«Производная в критической точке равна нулю» !!!!!

Последовательность нахождения параметров **A** и **B** (координаты критической точки):

1) определяется S' : S'_a ; S'_b

2) $S' = 0$ (свойство критической точки): $S'_a (b = \text{const}) = 0$; $S'_b (a = \text{const}) = 0$

3) Из полученных уравнений формируется система уравнений с двумя неизвестными параметрами **A** и **B** (координатами критической точки)

!!!!!! **НО** в итоге получаем нерешаемую систему, в которой неизвестный параметр **b** находится в степени !!!!



МНК применяется, но предварительно проводится процедура **ЛИНЕАРИЗАЦИИ**
СТЕПЕННОЙ МОДЕЛИ (приведение модели к линейному виду)

Построение парной степенной модели (продолжение)

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ЧЕРЕЗ ЛОГАРИФИМОВАНИЕ

$$\lg y = \lg(ax^b) = \log a + \log x^b = \log a + b \log x$$

Введем новые переменные: $Y = \log y$; $A = \log a$; $X = \log x$

$Y = bX + A$ (линейная модель зависимости $\log y$ от $\log x$) →

Исходные данные (выборки) нужно прологарифмировать и дальше работать с логарифмами

Пришли к задаче: найти такие b и A , при которых сумма квадратов разностей логарифмов Y расчетных и логарифмов Y фактических минимальная!!!!

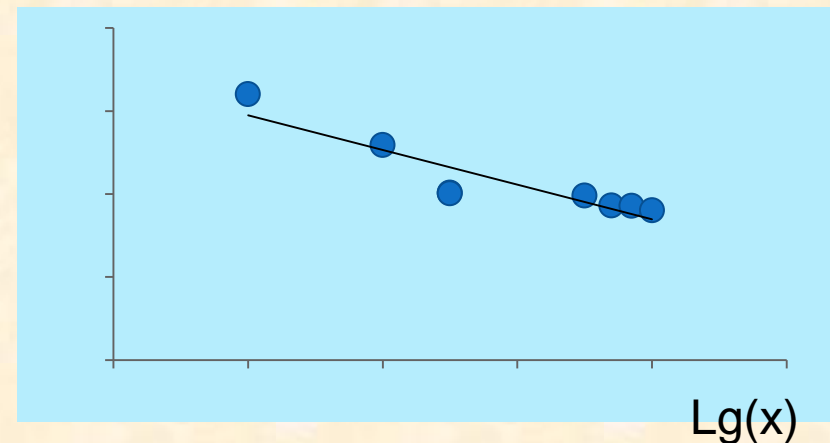
$$S = \sum (\lg(y \text{ расч}) - \lg(y \text{ фактич}))^2 - \text{минимальная}$$

$$S = \sum (b \cdot \lg(X) + A - \lg(y \text{ фактич}))^2$$

$$S'_a = 0; S'_b = 0$$

МНК определяют параметры b , A

$Lg(y)$



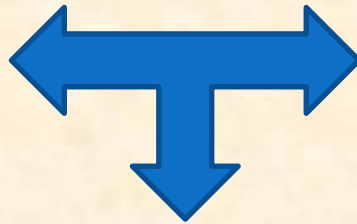
Из системы получим такие параметры b , A , при которых сумма квадратов разностей логарифмов игрика расчётного и фактического минимальная!!!!!!

$$\begin{cases} \sum Lg(y_i) = b \sum Lg(x_i) + nA \\ \sum Lg(y_i) * Lg(x_i) = b \sum (Lg(x_i))^2 + A \sum Lg(x_i) \end{cases}$$

Построение парной степенной модели (продолжение)

$$\begin{cases} \sum Lg(y_i) = b \sum Lg(x_i) + nA \\ \sum Lg(y_i) * Lg(x_i) = b \sum (Lg(x_i))^2 + A \sum Lg(x_i) \end{cases}$$

Решаем вручную



Решаем в пакете
анализа

Решаем в пакете SPSS

Построение парной степенной модели в Пакете Анализа (продолжение)

Получение внешних данных | Подключения | Сортировка и фильтр

F19

Виды зависимостей.xlsx * x | bizcom_price

	A	B	C	D
1	X	Y	Lg(Y)	Lg(X)
2	1	3	0,477121	0
3	3	2	0,30103	0,477121
4	2,5	1,5	0,176091	0,39794
5	3	1,7	0,230449	0,477121
6	5	2	0,30103	0,69897
7	10	1,2	0,079181	1
8	15	0,8	-0,09691	1,176091
9	20	0,7	-0,1549	1,30103
10	12	0,5	-0,30103	1,079181
11	14	0,4	-0,39794	1,146128
12	16	0,3	-0,52288	1,20412
13	15	0,2	-0,69897	1,176091

Регрессия

Входные данные

Входной интервал Y: \$C\$2:\$C\$13

Входной интервал X: \$D\$2:\$D\$13

Метки Константа - ноль

Уровень надежности: 95 %

Параметры вывода

Выходной интервал: \$A\$16:\$D\$21\$F\$19

Новый рабочий лист

Новая рабочая книга

Остатки

Остатки График остатков

Стандартизованные остатки График подбора

Нормальная вероятность

График нормальной вероятности

OK | Отмена | Справка

ИТОГИ РАСЧЕТА

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика
Y-пересечение	0,5708989	0,14528	3,92938
Переменная X 1	0,7360042	0,15539	-4,7362

ВЫВОД ОСТАТКА

Наблюдение	Предсказанное Y	Остатки
1	0,5708989	-0,093778
2	0,2197357	0,0812943
3	0,2780134	-0,101922
4	0,2197357	0,0107133
5	0,0564541	0,2445759
6	-0,1651053	0,2442865
7	-0,2947092	0,1977992
8	-0,3866646	0,2317626
9	-0,223383	-0,077647
10	-0,2726561	-0,125284
11	-0,3153384	-0,20754
12	-0,2947092	-0,404261

Подставляются в линейную модель

Параметр b линейной модели

Параметр A линейной модели



Проверка критической точки на минимум (максимум)

Построение парной степенной модели в (продолжение)

1 способ – по
линейной модели

2 способ – по степенной
модели

ПРОГНОЗ y ПРИ ЗАДАННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ x

1) задать x

2) рассчитать $Lg(x)$

3) подставить в линейную модель и
рассчитать $Lg(y)$

4) вычислить y (прогнозное) как $10^{Lg(y)}$

1) рассчитать $a = 10^A$

2) подставить a, b в общий вид
степенной модели (модель готова)

3) задать x

4) подставить в степенную модель
значение X и рассчитать y
(прогноз)

Итог (y) одинаковый – это и есть прогноз